6 Frenetovi obrasci (Frenet-Serretove formule)

Triedar $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ se naziva prirodni triedar krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$, odnosno krive $\vec{r} = \vec{r}(s)$. On se mijenja od tačke do tačke krive. Tu promjenu opisuju Freneovi (Frenet) obrasci:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}_0}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{n}_0}{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{n}_0}{\mathrm{d}s} = -\frac{\vec{n}_0}{R} - \frac{\vec{b}_0}{T}, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{b}_0}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{T}\vec{n}_0$$

ili što je ekvivalentno sa

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}_0}{\mathrm{d}s} = K\vec{n}_0, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{n}_0}{\mathrm{d}s} = -K\vec{t}_0 + \tau\vec{b}_0, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{b}_0}{\mathrm{d}s} = -\tau\vec{n}_0$$

gdje je K krivina krive, a $\frac{1}{T}$ torzija krive, koja se računa po formuli

$$\frac{1}{T} = -\frac{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{|\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}|^2}.$$

Za torziju se često upotrebljava i oznaka $-\tau = \frac{1}{T}$.

76. Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $\vec{r} = \vec{r}(s)$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zadovoljavaju Frenetove jednačine. Izračunati izraz $\vec{n} \times \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s}$ (tačnije pojednostaviti izraz, tj riješiti se vektorskog proizvoda).

77. Napisati Freneove obrasce za krivu $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$.

78. Vektor položaja pokretne tačke dat je kao funkcija luka $s : \vec{r} = s\vec{a} + \vec{a} \times \vec{A}(s)$, gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor $|\vec{a}| < 1$, a $\vec{A}(s)$ diferencijabilna vektorska funkcija. Dokazati da je odnos krivine i torzije konstantan.

79. Na binormali krive $\vec{r} = \vec{r}(s)$ konstantne torzije nalazi se odsječak date dužine ℓ čiji je jedan kraj na krivoj. Drugi kraj odsječka opisuje krivu $\vec{R} = \vec{R}(s)$ kad se s mijenja.

(a) Razložiti vektor binormale krive $\vec{R} = \vec{R}(s)$ po pravcima ortova prirodnog triedra date krive.

(b) Odrediti ugao između binormala krivih koje odgovaraju određenom s.

80. Data je kriva $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Razložite vektor $\frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{\mathrm{d}s^3}$ po pravcima ortova prirodnog triedra.

81. Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodini triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $(\vec{r} = \vec{r}(s))$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \overset{def}{=} \tau\vec{t} + K\vec{b}$, gdje su K i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t}, \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata?

82. Naći vektor $\vec{A}(s)$ koji zadovoljava uslove

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \vec{A} \times \vec{t}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = \vec{A} \times \vec{n}$$

gdje je s luk krivine $\vec{r} = \vec{r}(s)$ a $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ redom ortovi tangente, normale i binormale te krive.

Elementarna pitanja iz prve oblasti: Krive u prostoru.

1. Data je kriva L u implicitnom obliku

$$L : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}.$$

Kako odrediti projekciju te krive na $x0y$ ravan? Kako odrediti projekciju na $x0z$ ravan? Kako odrediti projekciju na $y0z$ ravan? Zašto bi uopšte tražili projekciju te krive na naku ravan?

2. Kriva L je data parametarski u skalarnom obliku

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I; \\ z = z(t) \end{cases}$$

Šta ćemo dobiti kada izraz $x(t)$ izjednačimo sa nulom? Kakvu tačku $M(t)$ ćemo dobiti kada za neku vrijednost t imamo da vrijedi $z(t) = 0$?

3. Data je prava

$$p : \frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{m}$$

Kako pronaći presjek ove prave sa xOy ravni? Kako pronaći presjek sa xOz ravni? Kako pronaći presjek sa yOz ravni?

4. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je prava $y = kx + n$? Kako napisati ovu pravu u parametarskom obliku?

5. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je prava $x = a$? Kako napisati ovu pravu u parametarskom obliku?

6. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je prava $y = b$? Kako napisati ovu pravu u parametarskom obliku?

7. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je krug neka funkcija $y = f(x)$? Kako napisati ovu funkciju u parametarskom obliku?

8. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je krug $x^2 + y^2 = R^2$? Kako napisati ovaj krug u parametarskom obliku?

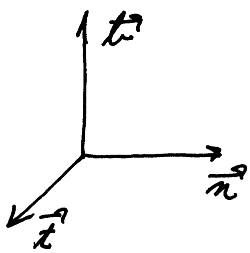
9. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$? Kako napisati ovu elipsu u parametarskom obliku?

10. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je hiperbola $x^2 - y^2 = 1$? Kako napisati ovu hiperbolu u parametarskom obliku?

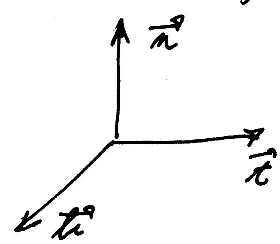
11. Projekcija neke krive $\vec{r} = \vec{r}(t)$ na $x0y$ ravan je hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$? Kako napisati ovu hiperbolu u parametarskom obliku?

Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodni triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $\vec{r}=\vec{r}(s)$, gdje su $\vec{t}, \vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zadovoljavaju Frenetove jednačine. Izračunati (tačnije pojednostaviti) izraz $\vec{n} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$ (riješiti se vektorskog proizvoda).

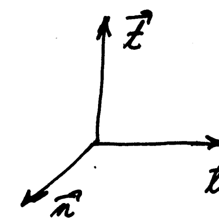
Rj. Za prirodni triedar znamo da vrijedi



$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$



$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$



$\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$

Iz čega slijedi $-\vec{b} = \vec{n} \times \vec{t}$, $-\vec{n} = \vec{t} \times \vec{b}$ i $-\vec{t} = \vec{b} \times \vec{n}$.

Iz Frenetovih formula $\dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}$ gdje je κ krivina krive, a τ torzija krive.

$$\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{n} \times (-\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}) = -\kappa (\vec{n} \times \vec{t}) + \tau (\vec{n} \times \vec{b}) =$$

$$= \kappa \vec{b} + \tau \vec{t}$$

traženo rješenje

(#) Napisati Freneove obrasce za krivu

$$\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}.$$

R.: Freneovi obrazci su (za krivu $\vec{r}=\vec{r}(s)$) $\dfrac{d\vec{t}_0}{ds} = K\vec{n}_0$, $\dfrac{d\vec{n}_0}{ds} = -K\vec{t}_0 - \dfrac{1}{T}\vec{b}_0$

i $\dfrac{d\vec{b}_0}{ds} = \dfrac{1}{T}\vec{n}_0$ gdje je K krivina krive, a $\frac{1}{T}$ torzija krive.

Torzija krive $\frac{1}{T}$ se računa po formuli $\dfrac{1}{T} = -\dfrac{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$,

a krivinu krive možemo izračunati po formuli $K = \dfrac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$.

$$\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

$$\dot{\vec{r}} = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$\dddot{\vec{r}} = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (+ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = \underline{a^2b^2\sin^2 t} + \underline{a^2b^2\cos^2 t} + a^4 = a^2b^2 + a^2 = a^2(b^2+a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{\vec{r}}^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

$$K = \frac{a\sqrt{b^2+a^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = b\left(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t\right) = a^2 b$$

$$\frac{1}{T} = -\frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

Traženi Freneovi obrasci su

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{a}{a^2+b^2}\vec{n}_0$$

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = -\frac{a}{a^2+b^2}\vec{t}_0 + \frac{b}{a^2+b^2}\vec{b}_0$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\frac{b}{a^2+b^2}\vec{n}_0$$

$\#$ Vektor položaja pokretne tačke dat je kao f-ja luka s: $\vec{r} = s\vec{a} + \vec{a} \times \vec{A}(s)$, gdje je $\vec{a}$ konstantan vektor $|\vec{a}| < 1$, a $\vec{A}(s)$ diferencijabilna vektorska f-ja. Dokazati da je odnos krivine i torzije konstantan.

R: Jedinične vektore $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ u ovom zadatku ćemo označiti sa $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$. Znamo da je $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ iz čega slijedi da je

$$\vec{t} = \vec{a} + \vec{a} \times \frac{d\vec{A}}{ds}.$$

Iz Freneovih obrazaca znamo da je

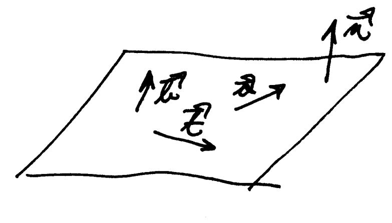
$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = K\vec{n}_0 \quad \text{pa je} \quad K\vec{n} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{a} \times \frac{d^2\vec{A}}{ds^2}$$

pa slijedi da je

$$\vec{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{A}}{ds}\right) \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \qquad \vec{n} \cdot \vec{a} = 0.$$

Znači, $\vec{a}$ leži u ravni određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{t}$, pa je (ako sa β označimo $\measuredangle(\vec{b}, \vec{a})$ a sa α ugao između $\measuredangle(\vec{t}, \vec{a})$) kako je $\vec{t} \perp b$

$$\beta = \measuredangle(\vec{b}, \vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{t}, \vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



Diferencirajmo jednakost $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$:

$$\frac{d\vec{n}}{ds}\vec{a} = 0.$$

Ako uvedemo oznaku $-\frac{1}{T} = \tau$

Prema Freneovim obrascima imamo

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t} + \tau\vec{b}$$

pa imamo da je

$$(-\kappa\vec{t}+\tau\vec{b})\cdot\vec{a}=0,$$

$$-\kappa\,\vec{t}\cdot\vec{a}=-\tau\,\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\frac{\kappa}{\tau}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{t}\cdot\vec{a}}$$

Kako je $\vec{t}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ to je

$$\vec{t}\cdot\vec{a}=|\vec{t}||\vec{a}|\cdot\cos\alpha=1\cdot a\cdot\cos\alpha=a^2$$ (ako stavimo $|\vec{a}|=a$)

tj. $\cos\alpha=a$.

Iz $\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\beta=1\cdot a\cos\beta=a\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$

$$=a\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\sin\alpha\right)=\left|\begin{array}{l}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\\ \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-a^2}\end{array}\right|$$

$$=a\sqrt{1-a^2}$$

slijedi $$\frac{\kappa}{\tau}=\frac{a\sqrt{1-a^2}}{a^2}$$

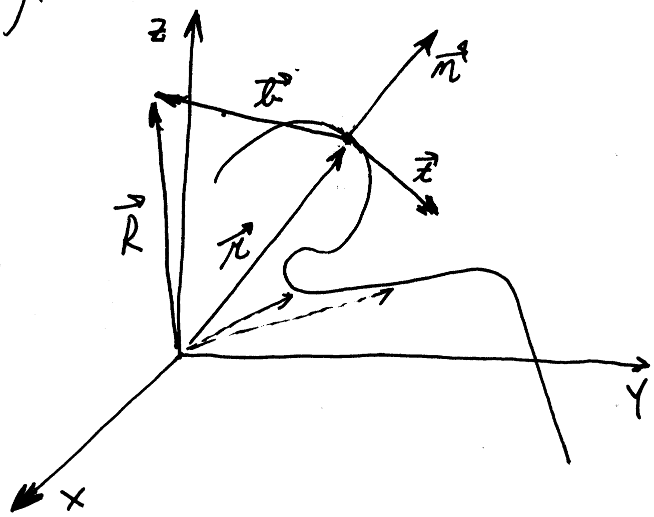
$$\frac{\kappa}{\tau}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$ traženi odnos

(#) Na binormali krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ konstantne torzije nalazi se odsječak date dužine l čiji je jedan kraj na krivoj. Drugi kraj odsječka opisuje krivu $\vec{R}=\vec{R}(s)$ kad se s mijenja.

a) Razložiti vektor binormale krive $\vec{R}=\vec{R}(s)$ po pravcima ortova prirodnog triedra date krive.

b) Odrediti ugao između binormala krivih koje odgovaraju određenom s.

R: Neka su $\vec{t}, \vec{n}$ i $\vec{b}$ pravci ortova prirodnog triedra



Jedan kraj dužine l je na krivoj $\vec{r}=\vec{r}(s)$. Vektor položaja drugog kraja dužine l (vidi sliku) biće

$$\vec{R}=\vec{r}(s)+l\,\vec{b}(s).$$

a) Za krivu $\vec{R}=\vec{R}(s)$, s ne mora biti dužina luka, pa njen vektor binormale $\vec{b}_1=\dot{\vec{R}}\times\ddot{\vec{R}}$, nije obavezno jedinični.

Primjenjujući Freneove obrasce i vodeći računa o tome da je $\tau=\text{const.}$ izračunajmo $\dot{\vec{R}}$ i $\ddot{\vec{R}}$.

$$\vec{R}=\vec{r}(s)+l\,\vec{b}$$

$$\dot{\vec{R}}=\frac{d\vec{r}}{ds}+l\left(\frac{d\vec{b}}{ds}\right)=\vec{t}+l(-\tau\vec{n}), \quad \text{gdje je } -\tau=\frac{1}{T}$$

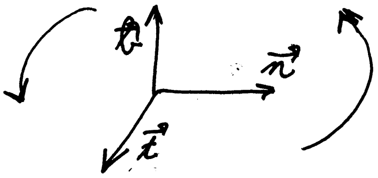
$$\ddot{\vec{R}}=\frac{d\vec{t}}{ds}-l\tau\left(\frac{d\vec{n}}{ds}\right)=\kappa\vec{n}-l\tau(-\kappa\vec{t}+\tau\vec{b})$$

$$\vec b_1 = \dot{\vec R} \times \ddot{\vec R} = (\vec t - l\tau\vec n)\times(k\tau l\vec t + k\vec n - l\tau^2\vec b)$$

$$= -k\tau^2 l^2(\vec n\times\vec t) + k(\vec t\times\vec n) - l\tau^2(\vec t\times\vec b) + l^2\tau^3(\vec n\times\vec b)$$

$$= \left|\begin{array}{l} \vec t\times\vec n = \vec b \\ \vec n\times\vec t = -\vec b \\ \vec n\times\vec b = \vec t \\ \vec b\times\vec t = \vec n \end{array}\right| = l^2\tau^3\vec t + k(1+l^2\tau^2)\vec b + l\tau^2\vec n$$

time smo $\vec b_1$ razložili na komponente u smjeru vektora $\vec t, \vec n, \vec b$.



$\vec t\times\vec n = \vec b$
$\vec n\times\vec b = \vec t$
$\vec b\times\vec t = \vec n$

b) Ugao između binormala biće

$$\cos\varphi = \frac{\vec b_1\cdot\vec b}{|\vec b_1|\underbrace{|\vec b|}_{=1}} = \frac{k(1+l^2\tau^2)}{\sqrt{(l^2\tau^3)^2 + k^2(1+l^2\tau^2)^2 + (l\tau^2)^2}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec b_1 = l^2\tau^3\vec t + k(1+l^2\tau^2)\vec b + l^2\tau^3(\vec n\times\vec b) \\ \vec b = \vec b \end{array}\right]$$

$$= \frac{k(1+l^2\tau^2)}{\sqrt{l^4\tau^6 + k^2(1+2l^2\tau^2+l^4\tau^4) + l^2\tau^4}} =$$

$$= \frac{k(1+l^2\tau^2)}{\sqrt{l^2\tau^4(l^2\tau^2+1) + k^2(1+l^2\tau^2)^2}} = \frac{k\sqrt{1+l^2\tau^2}}{\sqrt{l^2\tau^4 + k^2(1+l^2\tau^2)}}$$

traženi ugao

(#) Data je kriva $\vec{r}=\vec{r}(s)$. Razložiti vektor $\dfrac{d^3\vec{r}}{ds^3}$ po pravcima ortova prirodnog triedra.

Rj.: Jedinične vektore $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ označimo sa $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$. Kako je

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=K\vec{n}$$

(zato što je $\dfrac{d\vec{t}}{ds}=K\vec{n} \Rightarrow \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right)=K\vec{n}$)

gdje je K krivina krive to je

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\frac{dK}{ds}\vec{n}+K\frac{d\vec{n}}{ds}.$$

Koristimo Freneove obrazce ($\dfrac{d\vec{n}}{ds}=-K\vec{t}+\tau\vec{b}$; gdje je $\tau=-\frac{1}{T}$ torzija), pa će biti

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\frac{dK}{ds}\vec{n}+K(-K\vec{t}+\tau\vec{b})$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=-K^2\vec{t}+\frac{dK}{ds}\vec{n}+K\tau\vec{b}$$

traženo rješenje

(7) Neka je $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ prirodni triedar krive $\vec{r}$ parametrizovane dužinom luka $(\vec{r} = \vec{r}(s))$, gdje su $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori. Definišimo polje δ sa $\delta \overset{\text{def}}{=} \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}$ gdje su κ i $-\tau$ krivina i torzija krive $\vec{r}$. Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} \quad i \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata.

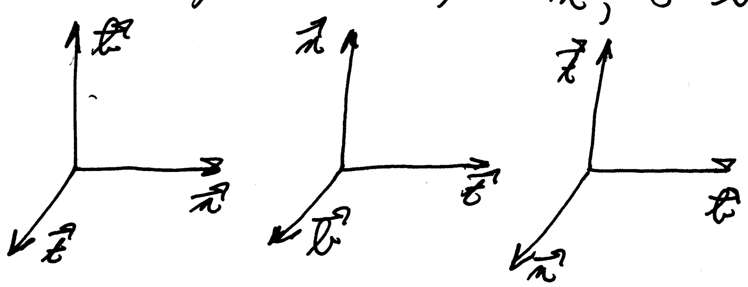
Rj.

Frenetovi obrasci za krivu $\vec{r} = \vec{r}(s)$ su

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \quad \text{gdje su} \qquad \dots (1)$$

$\vec{t}$, $\vec{b}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori.

Prvo izračunajmo $\delta \times \vec{t}$, $\delta \times \vec{n}$, $\delta \times \vec{b}$.



$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$
$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$
$$\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta \times \vec{t} &= (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{t} = \tau(\vec{t} \times \vec{t}) + \kappa(\vec{b} \times \vec{t}) = \kappa \vec{n} \\
\delta \times \vec{n} &= (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{n} = \tau(\vec{t} \times \vec{n}) + \kappa(\vec{b} \times \vec{n}) = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \\
\delta \times \vec{b} &= (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{b} = \tau(\vec{t} \times \vec{b}) + \kappa(\vec{b} \times \vec{b}) = -\tau \vec{n}
\end{aligned}\right\} \dots (2)$$

Sada iz (1) i (2) možemo zaključiti da je

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - \delta \times \vec{t} = 0, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - \delta \times \vec{n} = 0 \quad i \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - \delta \times \vec{b} = 0.$$

Na osnovu dobijenog rezultata možemo zaključiti da su Frenetove jednačine za $\frac{d\vec{t}}{ds}$, $\frac{d\vec{n}}{ds}$ i $\frac{d\vec{b}}{ds}$ ekvivalentne jednačinama $\delta \times \vec{t}$, $\delta \times \vec{n}$ i $\delta \times \vec{b}$.

(#) Naći vektor $\vec{A}(s)$ koji zadovoljava uslove

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{A}\times\vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{A}\times\vec{n},$$

gdje je s luk krive $\vec{r}=\vec{r}(s)$ a $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ ort tangente, normale i binormale te krive, respektivno.

Rj. Vektor $\vec{A}(s)$ možemo razložiti u pravcima vektora $\vec{t}$, $\vec{n}$ i $\vec{b}$: $\vec{A}(s) = \alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b}$.

Prema Freneovim obrazcima

$$K\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} \overset{\text{prema uslovu zadatka}}{\Longrightarrow} K\vec{n} = \vec{A}(s)\times\vec{t}$$

$$\Rightarrow \quad K\vec{n} = (\alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b})\times\vec{t} \qquad \ldots (*)$$

Dalje, $\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t} + \tau\vec{b}$ pa je iz uslova zadatka

$$-K\vec{t} + \tau\vec{b} = (\alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b})\times\vec{n}. \qquad \ldots (**)$$

Prema tome

$$(*) \Rightarrow K\vec{n} = \alpha\vec{t}\times\vec{t} + \beta\vec{n}\times\vec{t} + \gamma\vec{b}\times\vec{t} = \beta(-\vec{b}) + \gamma\vec{n}$$
$$= -\beta\vec{b} + \gamma\vec{n} \Rightarrow \beta = 0, \ \gamma = K;$$

$$(**) \Rightarrow -K\vec{t} + \tau\vec{b} = (\alpha\vec{t} + K\vec{b})\times\vec{n} = \alpha\vec{t}\times\vec{n} + K\vec{b}\times\vec{n}$$
$$= \alpha\vec{b} - K\vec{t} \Rightarrow \alpha = \tau$$

Prema tome $\vec{A}(s) = \tau\vec{t} + K\vec{b}$.